

DIŞLI SEHİM MODELLERİ

Sadettin Orhan

Email: sadettinorhan@yahoo.com

Kırıkkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Makine Bölümü 71450 Kırıkkale

ÖZET

Dişli mekanizmalarında kuvvet, gerilme, titreşim analizleri için gerekli olan diş rijitliğini bulmak için kavrama boyunca oluşan yer değiştirmelerin bulunması gerekmektedir. Bu çalışmada yaygın olarak kullanılan yer değiştirme modelleri ele alınmıştır. Her bir model kısaca açıklanmış, yer değiştirme ifadeleri de verilmiştir.

ABSTRACT

It is required to find deflections along meshing line for tooth stiffness that it is required for analysis of force, stress, vibration in geared mechanisms. In this study, deflections models used as common was investigated. Each one was shortly introduced and also expressions of deflection were given.

1. GİRİŞ

Teknolojinin gelişmesi ile birlikte hareket iletiminde dişlilerin kullanımı oldukça yaygınlaşmıştır. Hareket iletimi hassasiyet gerektiren bir iştir. Bu yüzden dişlilerin tasarım aşamasından itibaren her türlü analizleri göz önüne alınmalıdır. Dişlilerde önemli etkenlerden birisi de titreşimdir. Titreşim yüzünden dişlilerde hasarlar, gürültü ve iletim hatası olmaktadır. Dişli titreşimini inceleyebilmek için kavrama halindeki iki dişin titreşim modelinin oluşturulması gerekmektedir. Dişli üzerine yapılan çalışmalar çok eski tarihlere kadar uzanır. Bu çalışmalardan 1986 yılına kadar olanlar Özgüven ve Houser'in [1] çalışmalarında genel hatları ile irdelenmiştir. Dişlilerin kuvvet, gerilme ve titreşimlerini teorik olarak hesaplayabilmek için yer değiştirmelerin bulunması, buradan da diş rijitliğinin hesaplanması gerekmektedir. Bu yüzden, dişli yer değiştirme modelleri dişlilerin analizlerinde önemli yer tutmaktadırlar

2. MODELLER

Dişliler üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, yaygın olarak iki çeşit yer değiştirme modeli kullanıldığı görülmektedir.

- 1.Trapez Metodu
- 2.Nümerik integrasyon

2.1. Trapez Metodu:

Bu metot ilk olarak Timoshenko ve Baud [2] tarafından önerilmiş, daha sonra Nakada ve Utagawa[3] tarafından geliştirilmiştir. Modelde diş çok kısa ankastre kiriş olarak modellenmiştir. Bu ankastre kiriş modeli iki kısımdan oluşmaktadır: Temel dairesinin altında kalan kısım dikdörtgen kiriş olarak, temel dairesinin dışında kalan kısım ise trapez kiriş olarak

kabul edilmiştir, model Şekil-1'de görülmektedir. Model göz önünde bulundurularak temel mukavemet prensipleri uygulanırsa kuvvetin etkisi altında toplam yer değiştirme miktarı $\delta_T = \delta_S + \delta_B + \delta_G + \delta_P$ ifadesinden bulunur. (1)

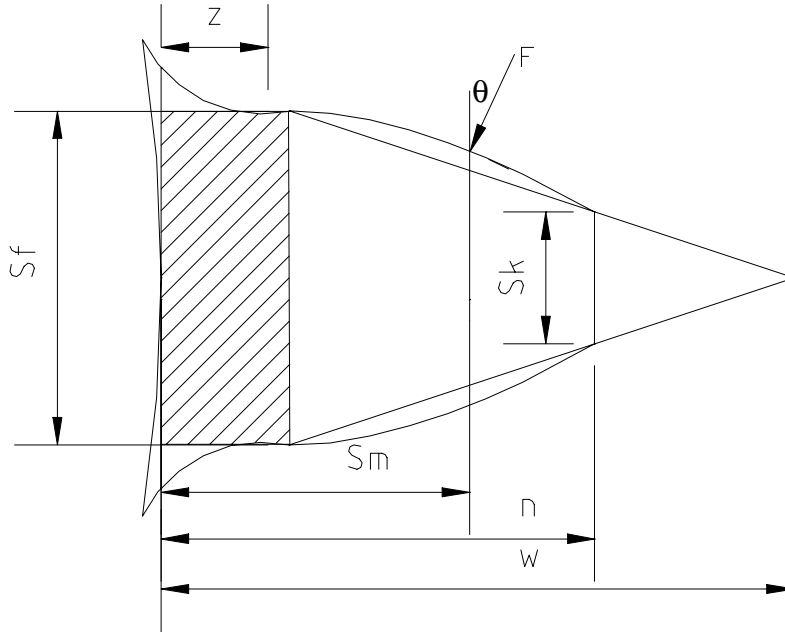
$$w = \frac{nS_f - zS_k}{S_f - S_k} \quad (2)$$

$$\delta_S = \frac{2(1+\nu)F_i \cos^2 \theta}{EBS_f} \left[z + (w-z) \log_e \frac{(w-S_m)}{(w-z)} \right] \quad (3)$$

$$\delta_B = \frac{12F_i \cos^2 \theta}{EBS_f^3} \left[S_m^2 + \frac{z^2}{3} - S_m z \right] + \frac{6F_i \cos^2 \theta (w-z)^3}{EBS_f^3} \left[\frac{(w-S_m)}{(w-z)} \left\{ 4 - \frac{(w-S_m)}{(w-z)} \right\} - 2 \log_e \left[\frac{(w-S_m)}{(w-z)} \right] - 3 \right] \quad (4)$$

$$\delta_G = \frac{24F_i S_m^2 \cos^2 \theta}{\pi EBS_f^2} \quad (5)$$

$$\delta_P = \frac{4F_i(1-\nu^2)}{\pi EB} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (6)$$



Şekil-1 Trapez diş modeli

Bu metodu kullanan bir çok araştırmacı vardır. Furrow ve Mabie[4], Akrilikten yapılmış birkaç tane düz dişlinin değişik yükler ve sıcaklıklar altındaki yer değiştirmelerini deneysel olarak bulup ,bu formülleri kullanarak sonuçları irdelenmişlerdir. Shing[5] bir servomekanizmayı kontrol etmek amacıyla bu modelde bazı değişiklikler yaparak dişlilerin rijitliğini elde etmiştir. Elkholy[6] bu modeli kullanarak Yüksek kavrama oranlı dişlilerde yük dağılımını hesaplamıştır.

2.2. Nümerik integrasyon Metodu:

İlk olarak Cornell[7], dişli nonlinear ankastre kiriş olarak ele alıp yer değiştirme ifadelerini türetmiştir. Daha sonra Lin ve Liou[8] Hertz yer değiştirmesi haricindeki yer değiştirme terimlerinin, uygulanan yüklerle lineer olarak ilişkili olduğunu belirtip, Cornell'in ifadelerini yeniden düzenlemiştir. Bu metotta dişlinin diş ucundan radüs başlangıcına kadar olan kısmı (evolvent) üniform olmayan ankastre kiriş olarak kabul edilmiştir. Bu kısım her biri ankastre kiriş olarak kabul edilen n sayıda elemana bölünmüştür. Temel mukavemet prensiplerinden yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir. Lokal temastan dolayı hertz yer değiştirmesi ve radüs-diş göbeğinin esnekliğinden dolayı oluşan yer değiştirme de hesaba katılmıştır. Diş modeli şekil-2'de görülmektedir.

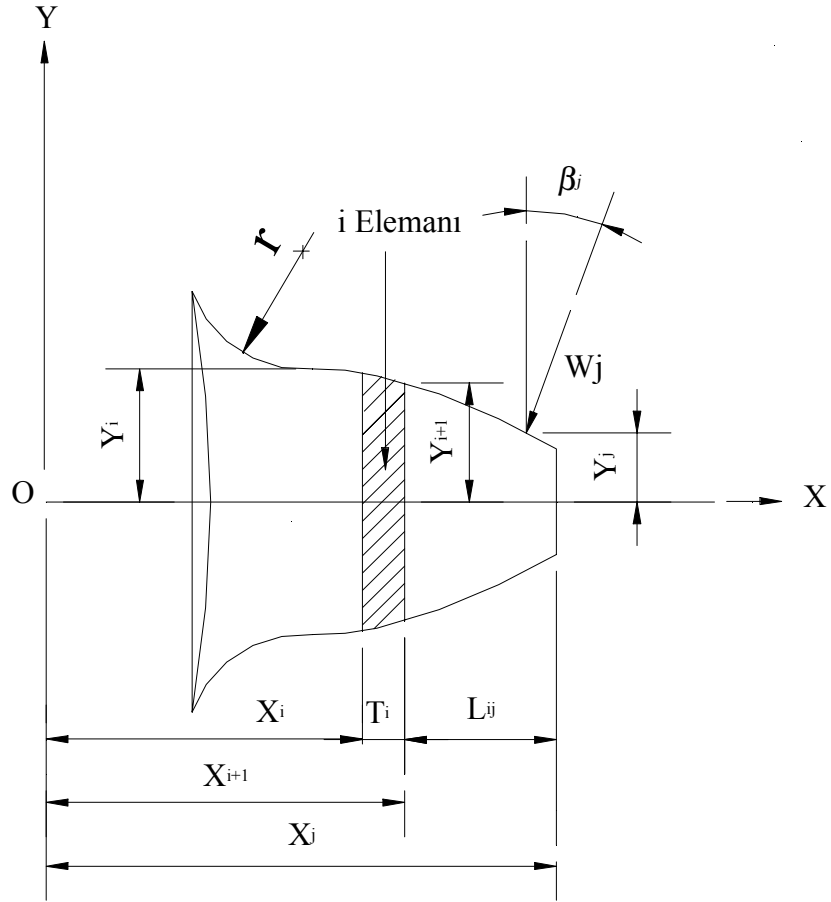
2.2.1. Eğilmeden dolayı oluşan yer değiştirme:

$L=T_i$ alınarak;

$$\delta_T = \frac{W_j \cos \beta_j}{3EI_i} (T_i^3) + \frac{W_j \cos \beta_j}{2EI_i} (T_i^2 L_{ij}) \quad (7)$$

2.2.2. Momentten dolayı oluşan yer değiştirme:

$$\delta_M = \frac{W_j (L_{ij} \cos \beta_j - Y_j \sin \beta_j)}{2EI_i} (T_i^2) + \frac{W_j (L_{ij} \cos \beta_j - Y_j \sin \beta_j)}{EI_i} (T_i L_{ij}) \quad (8)$$



Şekil-2 Nümerik integrasyon diş modeli

2.2.3. Kayma deformasyonu

Kuvvetin düşey bileşeni kayma deformasyonuna sebep olur.

$$\delta_K = \frac{2.4(1+\nu)W_j T_i \cos \beta_j}{EA_i} \quad (9)$$

2.2.4. Eksenel basma deformasyonu

$$\delta_b = \frac{W_j \sin \beta_j T_i}{EA_i} \quad (10)$$

2.2.5. Toplam yer değiştirme

Sırasıyla, ayrı ayrı bulunan eğilme, moment, kayma ve basma yer değiştirmelerinin kuvvetin uygulanma doğrultusundaki bileşenlerinin toplamına eşittir.

$$\delta_T = (\delta_e + \delta_M + \delta_K) \cos \beta_j + (\delta_b)_{ij} \sin \beta_j \quad (11)$$

2.2.6. Radüs ve diş göbeğinin (foundation) yer değiştirmeleri

Yine Radüs bölgesi kiriş elemanlara bölünüp, her bir eleman için yer değiştirmeler bulunup toplanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\delta_{fb} = W_j \left\{ \frac{\cos^2 \beta_j}{E} \left[\frac{(T_{fb})_i^3}{3} + (T_{fb})_i^2 L_{fb} + (T_{fb})_i (L_{fb})_{ij}^2 + 2.4(1+\nu)(T_{fb}) \right] \right. \\ \left. - \frac{\cos \beta_j \sin \beta_j}{E} \left[\frac{(T_{fb})_i^2 Y_j}{2} + (T_{fb}) Y_j (L_{fb})_{ij} \right] + \frac{\sin^2 \beta_j}{E} \left[\frac{(T_{fb})_i}{(A_{fb})_i} \right] \right\} \quad (12)$$

$$(\delta_{fe})_{ij} = \frac{W_j \cos^2 \beta_j}{EF} (1-\nu^2) \left\{ \frac{16.67}{\pi} \left[\frac{(l_f)_i}{h_f} \right]^2 + 2 \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu^2} \right) \left[\frac{(l_f)_i}{h_f} \right] + 1.534 \left(1 + \frac{\tan^2 \beta_j}{2.4(1+\nu)} \right) \right\} \quad (13)$$

$$(\delta_f)_{ij} = (\delta_{fb})_{ij} + (\delta_{fe})_{ij} \quad (14)$$

2.2.7. Yerel temas yer değiştirmesi

$$E_{12} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2} \text{ olmak üzere, } (\delta_L)_{ij} = \frac{1.275}{E_{12}^{0.9} F^{0.8} W_j^{0.1}} \quad (15)$$

eşitliği ile hesaplanır.

2.2.8. Toplam yer değiştirme

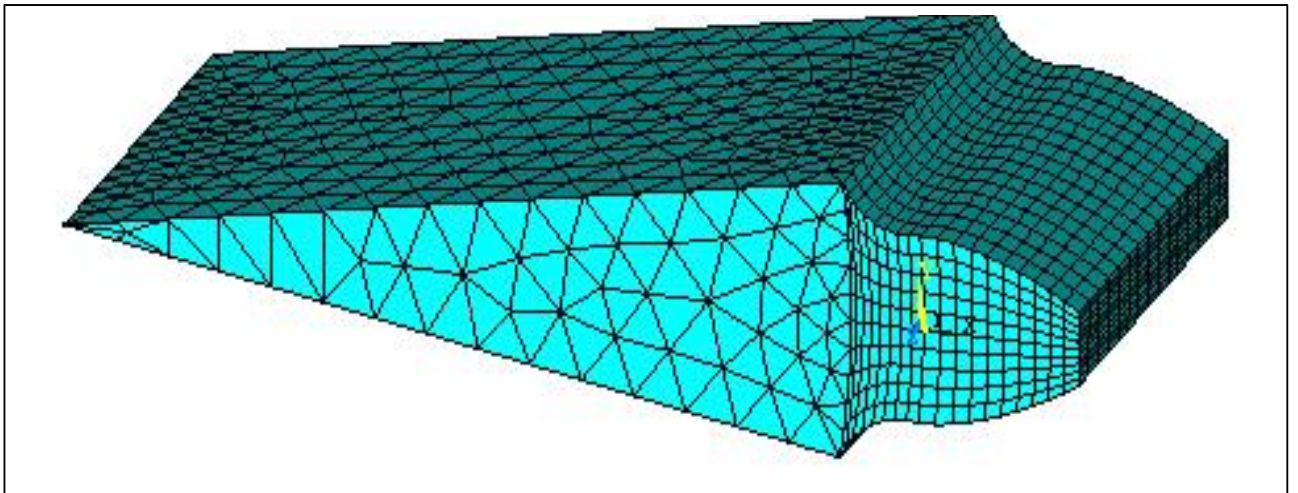
$$(\delta_{Toplam})_{ij} = (\delta_T)_{ij} + (\delta_f)_{ij} + (\delta_L)_{ij} \quad (16)$$

eşitliğinden bulunur.

Bu metod bir çok araştırmacı tarafından kullanılmıştır. Lin ve diğerleri [9], Lin, Huston ve Coy [10], Yoon ve Rao[11], Doğruer[12], Yang ve Lin[13], Lin ve Lin P.[14] bunlardan bazılarıdır.

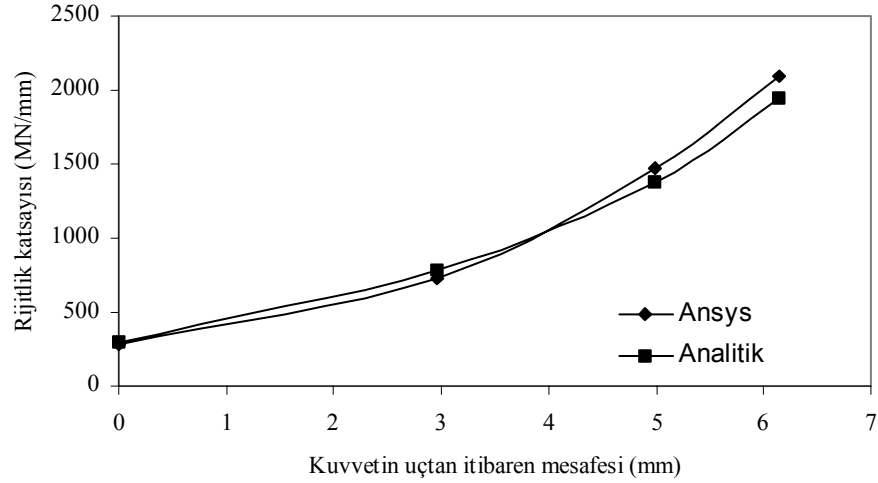
2.3. Sonlu elemanlar metodu

Ticari sonlu elemanlar paket programlarının gelişmesi ile birlikte karmaşık problemler bile oldukça kolay bir şekilde çözülebilmektedir. Kavrama anındaki dişlilerde meydana gelen yer değiştirmeler de bu programlar kullanılarak hassas bir şekilde hesaplanabilmektedir. Diş ya ayrı bir çizim programı ile çizilir, sonra sonlu elemanlar programına aktarılır, veya doğrudan sonlu elemanlar programında çizilir. Sonra küçük elemanlara ayrılır, sınır şartları ve kuvvetler uygulanır, yer değiştirmeler bulunur. Bu yolla gerçeğe çok yakın sonuçlar elde edilmektedir.



şekil-3 Aktaş ve Orhan'ın dişli sonlu elemanlar modeli

Son zamanlarda bir çok araştırmacı bu metod ile dişlileri modelleyip analizini yapmaktadırlar. Vijayarangan ve Ganesan[15], Dabnichki ve Crocombe[16], Filiz ve diğerleri [17], Arafa[18], Randall[19], Zhang ve diğerleri[20], Parker ve diğerleri[21], Vedmar ve Henriksson[22], Vinayak ve Singh[23] bunlara örnek olarak verilebilir. Aktaş ve Orhan[24] bir dişin sonlu elemanlar modelini (şekil-3) oluşturup kavrama kuvvetinin etkisi altındaki yer değiştirmeyi hesapladılar, buldukları sonucu trapez metodu ile karşılaştırdılar (şekil-4), sonuçların uyum içinde olduğunu gösterdiler.



Şekil-4. Sonlu elemanlar ve trapez metodu karşılaştırması

3. SONUÇ

Bu çalışmada dişlilerde kavramadan dolayı meydana gelen yer değiştirmeleri hesaplamak için oluşturulan modeller incelendi. Her bir model kısaca açıklandı ve yer değiştirme ifadeleri verildi. Gerek trapez, gerekse nümerik integrasyon metodunda, model oluştururken belirli kabuller yapılarak ifadeler türetilmiştir. Sonlu elemanlar ile yapılan çözümlerin gerçeğe daha yakın olması ve çok fazla zaman almaması sebebiyle, dişlilerde yer değiştirme hesapları için kullanılabilirliği söylenebilir. Bu çalışmanın dişli üzerine çalışacak araştırmacılara yol gösterici olacağı düşünülmüştür.

4. SİMGELER

- δ_s : Kayma deformasyonu
- δ_B : Eğilme yer değiştirmesi
- δ_P : Yerel temas yer değiştirmesi
- δ_G : Diş göbeği deformasyonu
- E : Elastisite modülü
- ν : Poisson oranı
- B : Diş genişliği
- ρ_1 : Döndüren dişlinin temas noktasındaki eğrilik yarıçapı
- ρ_2 : Döndürülen dişlinin temas noktasındaki eğrilik yarıçapı
- I : Alan atalet momenti
- δ_{fb} : Radüs yer değiştirmesi
- δ_{fe} : Diş göbeği(foundation) deformasyonu
- E_1 :Pinyon elastisite modülü
- E_2 :Dişli elastisite modülü

5. KAYNAKLAR

1. Özgüven, H.N. ve Houser, D.R. "Mathematical Models used in Gear dynamics-A Review" ; Journal of Sound and Vibration, 121(3), 383-411, 1988
2. Timoshenko, S. ve Baud, R.V. "The strenght of gear teeth" ; Mechanical Engineering, vol.48,no.11, pp.1105-1109

3. Nakada, T. ve Utagawa, M. "The Dynamic loads on Gear caused by varying elasticity of the mating teeth"; Proceeding of the 6th Japan national congress for Applied Mechanics, pp.493-497
4. Furrow, R.W. ve Mabie, H.H. "The measurement of static deflection in spur gear teeth"; Journal Mechanisms, volume 5, pp.147-168, 1970
5. Shing, T-K. "Dynamics and control of geared servomechanisms with backlash and friction considerration"; Thesis Report, Institute for System research, University of Maryland, USA, 1994
6. Elkholy, A.H. "Tooth load sharing in high-contact ratio spur gears" , ASME Journal of Transmissions, Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol.107, pp.11-16
7. Cornell, R.W. ve Westervelt, J. "Dynamic tooth load and stressing for high contact ratio spur gears", Journal of Mechanical Design, vol.100, no.1, pp.69-76, Jan.1978
8. Lin, H.H. ve Liou, C.H. "A parametric study of spur gear dynamics", Nasa Contractor Report, Nasa/Cr-1998-206598, January 1998, 83 pages
9. Lin, H.H.; Townsend, D.P. and Oswald, F.B. "Prediction of gear dynamics using fast fourier transform of static transmission error", Mech. Struct. and Mach., 21(2), 237-260, 1993
10. Lin, H.H.; Huston, R.L. and Coy, J.J. "on dynamic loads in parallel shaft transmissions: part I-Modelling and analysis", ASME Journal of Transmissions, Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol.110, pp.221-225, June 1988
11. Yoon, K.Y. ve Rao, S.S. "Dynamic load analysis of spur gears using a new tooth profile", Journal of Mechanical Design, vol.116, pp.1-6, March 1996
12. Doğruer, C. U. "Dynamic Analysis of Spur gears", Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, 1999
13. Yang, D.C.H. ve Lin, Y.J. "Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics", ASME Journal of Transmissions, Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol.109, pp.189-196, June 1987
14. Lin, P.H. ve Lin, H.H. "Using dynamic analysis for compact gear design", NASA Technical memorandum, NASA/TM-1998-207419, 8 sayfa, September 1998
15. Vijayarangan, S. ve Ganesan, N. "A study of dynamic stresses in a spur gear under a moving line load and impact load conditions by a three-dimensional finite element method", Journal of Sound and Vibration, 162(1), 185-189, 1993
16. Dabnichki, P. ve Crocombe, A. "Finite element modelling of local contact conditions in gear teeth", Journal of Strain Analysis, vol.34, no.2, pp.129-142
17. Filiz, H.İ. ve Eyercioğlu, O. "Evaluation of gear tooth stresses by Finite Element", Journal of Engineering for Industry, vol.117, pp.232-239, May 1995
18. Arafa, H., Megahed, M.M.; "Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method"; Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol.213, part C, sayfa 569-579, 1999
19. Du, S., Randall, R.B. ve Kelly, D.W.; "Modelling of spur gear mesh stiffness and static transmission error"; Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol.212, part C, sayfa 287-297, 1998
20. Zhang, J.J., Esat, I.I. ve Shi, Y.H. "Load analysis with varying mesh stiffness", Computers and Structures, 70(1999), 273-280
21. Parker, R.G., Vijayakar, S.M. ve Imajo, T. "Non-linear dynamic response of a spur gear pair: Modelling and experimental comparisions", Journal of Sound and Vibration, 237(3), pp.435-455, 2000
22. Vedmar, L. Ve Henriksson, B. "A general approach for determining dynamic forces in spur gears", Journal of Mechanical Design, vol.120, pp.593-598, December 1998
23. Vinayak, H. Ve Singh, R. "Multi-body dynamics and modal analysis of compliant gear bodies", Journal of Sound and Vibration, 210(2), pp.171-214, 1998
24. Aktaş, A. ve Orhan, S. "Düşük kavrama oranlı dişlilerde rijitliğin sonlu elemanlar metodu ile belirlenmesi"; 5.Figes Kullanıcılar Toplantısı, Ekim 2000, Belek-Antalya